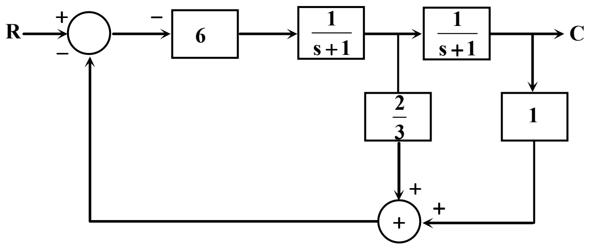
کنترل فرآیندها

۱ ــ با توجه به دیاگرام بلوکی مقابل برای جهت پایداری سیستم، کدام گزینه باید برقرار باشد؟



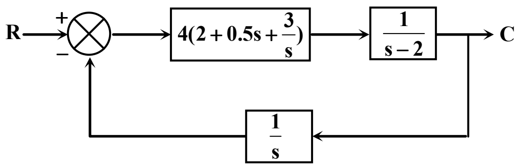
۱) پاسخ محدود می‌باشد.

۲) سیستم در آستانهٔ ناپایداری می‌باشد.

۳) پاسخ نامحدود می‌باشد.

۴) سیستم ناپایدار می‌باشد.

۲ ــ با توجه به دیاگرام بلوکی مقابل آیا سیستم پایدار می‌باشد؟



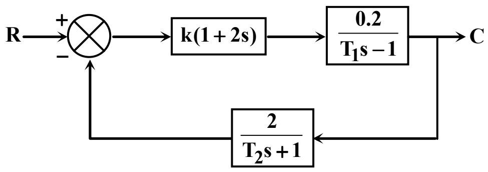
۱) سیستم ناپایدار می‌باشد.

۲) سیستم به صورت مشروط پایدار می‌باشد.

۳) سیستم پایدار می‌باشد.

۴) سیستم نوسانی و در آستانه ناپایداری می‌باشد.

۳ ــ با توجه به دیاگرام بلوکی مقابل، جهت پایداری سیستم کدام گزینه باید برقرار باشد؟



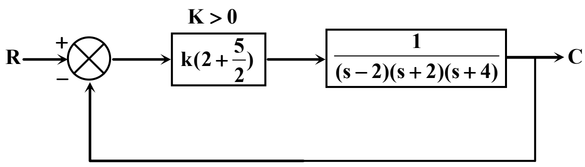
۱) $k > ۲/۵ \; , \; ۰ < T_۲ \; , \; ۰ < T_۱$

۲) $k > ۰/۴ \; , \; T_۲ > ۰ \; , \; T_۱T_۲ < ۰$

۳) $k = ۱ \; , \; ۰ > T_۱T_۲ \; , \; ۲ < \dfrac{T_۱ - T_۲}{T_۱T_۲} < ۰$

۴) $k > ۲/۵ \; , \; T_۱T_۲ > ۰ \; , \; -۲ < T_۱ - T_۲ < ۰$

۴ ــ در سیستم شکل زیر سیستم مدار باز یک قطب ناپایدار دارد. در مورد پایداری سیستم مدار بسته و ارتباط آن با K کدام گزینه صحیح است؟



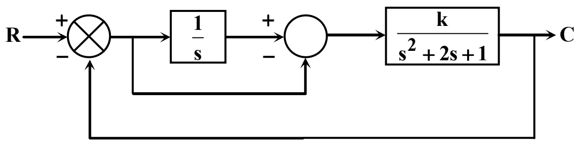
۱) اجرای مقادیر K بزرگتر از ۱۲- سیستم مدار بسته پایدار است.

۲) برای مقادیر $K > ۰$ سیستم مدار بسته همواره پایدار است.

۳) سیستم مدار بسته همانند سیستم مدار باز ناپایدار می‌باشد.

۴) سیستم مدار بسته همواره برای $K > ۰$ و $K > -۱۲$ پایدار است.

۵ ـ در شکل زیر حدود K برای پایداری حلقه بسته برابر با کدام است؟



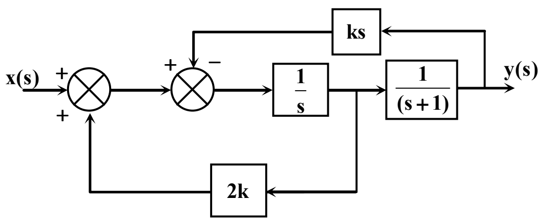
۱) سیستم حلقه بسته ناپایدار است.

۲) برای $K > \frac{۲}{۳}$ سیستم پایدار است.

۳) برای بازه $۰ < K < \frac{۲}{۳}$ سیستم پایدار است.

۴) سیستم برای تمام بازه $K < ۰$ و $K > \frac{۲}{۳}$ سیستم پایدار است.

۶ ـ نمودار جعبه‌ای نشان داده شده در زیر، میزان k چقدر باشد که در ازای یک تغییر پله‌ای واحد خطای دائمی برابر صفر باشد؟



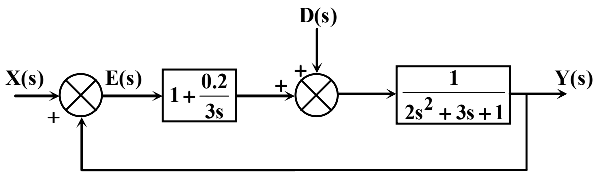
۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱۳}{۲}$

۳) $-\frac{۱}{۲}$

۴) صفر

۷ ـ خطای ماندگار (Steady State error) سیستم کنترل فیدبک PI نشان داده شده در شکل، به اغتشاشی خارجی D که به صورت تابع پله واحد در نظر گرفته می‌شود چقدر است؟ (در واقع $x(s) = ۰$ و تنها ورودی سیستم اغتشاش D(s) می‌باشد.)



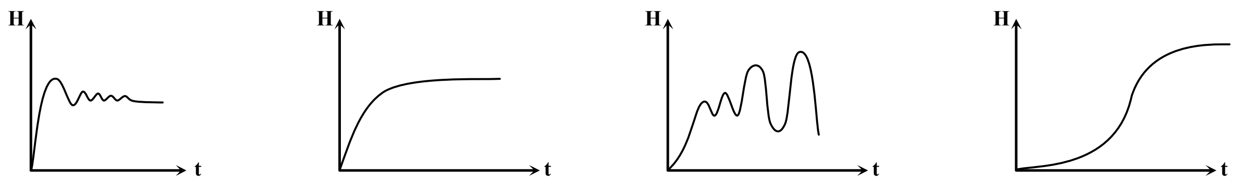
۱) سیستم پایدار است و خطای حالت ماندگار $e_{ss} = \frac{۱}{۲}$

۲) سیستم حلقه بسته ناپایدار است و لذا خطای حالت ماندگار بی‌مفهوم است.

۳) خطای ماندگار حلقه بسته سیستم فوق $e_{ss} = \frac{۳}{۲}$ می‌باشد.

۴) سیستم پایدار است لذا خطای حالت ماندگار به ورودی اغتشاش پله صفر است. $e_{ss} = ۰$

۸ ـ پاسخ پله‌ای واحد یک سیستم سطح مایع تداخلی (interacting) مشتمل بر دو مخزن مشابه کدام نمودار است؟



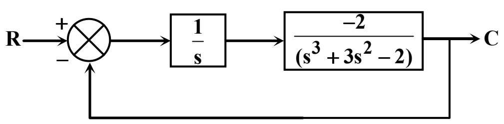
(۴) (۳) (۲) (۱)

۹ ـ مخرج تابع تبدیل مدار بسته سیستمی به صورت زیر است در مورد پایداری این سیستم کدام گزینه درست است؟

$$۱ + GH(S) = S^{۴} + ۲S^{۳} - S^{۲} + ۳S + ۱$$

۱) پایدار است. ۲) سه ریشه ناپایدار کننده دارد. ۳) دو ریشه ناپایدار کننده دارد. ۴) یک ریشه ناپایدار کننده دارد.

۱۰ ـ در مدار زیر اگر ورودی به صورت $R(t) = t^{۲}$ باشد، مقدار افت کنترل (offset) کدام است؟



۱) ۵

۲) صفر

۳) ۵−

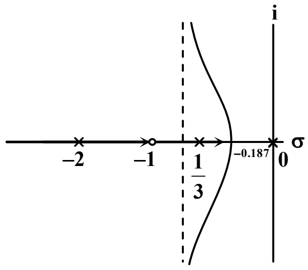
۴) ۳−

۱۱ ـ تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترلی به شکل $\frac{N}{D}=\frac{۲K}{(s-۲a)(s+۷)}$ مفروض است. نقطه شکست مکان هندسی ریشه‌های این سیستم به ازای $k>۰$ و $a>۰$ کدام است؟

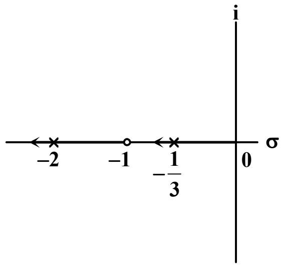
۱) $s+۳/۵$
۲) $-۵s-۷/۵$
۳) $۵s-۷/۵$
۴) $-s+۳/۵$

۱۲ ـ یک سیستم حلقه بسته دارای تابع انتقال حلقه باز معادل $G=\frac{K_c(۱+\frac{۱}{\tau_I s})}{(۱+\tau_۱ s)(۱+\tau_۲ s)}$ می‌باشد. اگر همواره $K_c>۰$ باشد (سیستم پایدار) مکان هندسی ریشه‌ها کدام است؟

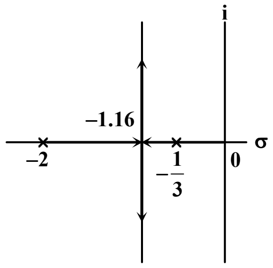
$\tau_I=\frac{۱}{۴}\ ,\ \tau_۱=۰/۵\ ,\ \tau_۲=۳$



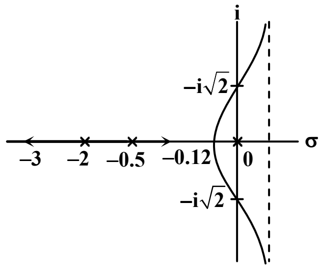
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

۱۳ ـ تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $G(s)=\frac{(s+۱)}{s(s+۳)(s+۴)}$ است. زاویه مجانب‌های مکان هندسی ریشه‌ها در محل تلاقی آنها کدام است؟

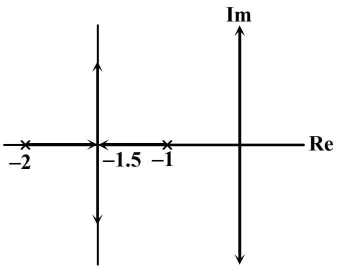
۱) $\alpha=\begin{cases}\frac{\pi}{۲}\\ ۳\frac{\pi}{۲}\end{cases}$ $\gamma=-۳/۵$

۲) $\alpha=\begin{cases}\frac{\pi}{۲}\\ \frac{۳\pi}{۲}\\ \frac{۵\pi}{۲}\end{cases}$ $\gamma=-۳$

۳) $\alpha=\begin{cases}\frac{\pi}{۲}\\ ۳\frac{\pi}{۲}\end{cases}$ $\gamma=-۳$

۴) $\alpha=\begin{cases}\frac{\pi}{۲}\\ ۳\frac{\pi}{۲}\\ ۵\frac{\pi}{۲}\\ ۷\frac{\pi}{۲}\end{cases}$ $\gamma=-۳/۵$

۱۴ ـ مکان هندسی ریشه‌های سیستم مدار با $GH(s)=\frac{\sqrt{۲}K_c}{(s+۱)(s+۲)}$ مطابق شکل زیر است. K_c مربوطه جهت نگه داشتن $\xi=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ کدام است؟ $(\sqrt[۳]{۱۸}\cong ۲/۵)$



۱) $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$
۲) $\frac{۲}{\sqrt{۲}}$
۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$
۴) صفر

۱۵ ـ تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $G(s)=\frac{k(s+۲)}{(s-۱+j)(s-۱-j)}$ است. با استفاده از نمودار مکان هندسی ریشه‌ها، پاسخ سیستم به ورودی پله‌ای چگونه است؟

۱) در تمام بهره‌ها نوسانی است.
۲) در تمام بهره‌ها غیرنوسانی است.
۳) در بهره‌های پایین غیرنوسانی و در بهره‌های بالا نوسانی است.
۴) در بهره‌های پایین نوسانی و در بهره‌های بالا غیرنوسانی است.

کنترل فرآیندها

۱ ـ گزینه «۱»

تابع تبدیل حلقه بسته سیستم : $\frac{G}{R}=\frac{\partial}{s^{۲}+۵s+۶}\Rightarrow$ معادله مشخصه $۱+G=۰$

$s^{۲}+۵s+۶=۰$

$S_{۱,۲}=\frac{-۵\pm\sqrt{۲۵-۲۴}}{۲}\begin{cases}S_{۱}=\frac{-۵+۱}{۲}=-۲\\ S_{۲}=\frac{-۵-۱}{۲}=-۳\end{cases}$ سیستم پایدار است.

۲ ـ گزینه «۳»

$$1+G=1+4(2+0/5s+\frac{3}{S})(\frac{1}{s-2})(\frac{1}{S})=1+\frac{8+4S+\frac{12}{s}}{s(s-2)}$$

$$=\frac{s^2-2s+8+4s+\frac{12}{s}}{s(s-2)}=\frac{\frac{s^3-2s^2+8s+4s^2+12}{s}}{s^2-2s}=\frac{s^3+2s^2+8s+12}{s^3-2s^2}=0 \Rightarrow s^3+2s^2+8s+12=0$$

بر طبق الگوریتم Routh شرط لازم و کافی برای آنکه تمامی ریشه‌های معادله مشخصه سیستم در نیمه چپ باشند آن است که تمامی عناصر محاسبه شده در ستون اول آرایه Routh غیرصفر بوده و علامت یکسانی داشته باشند. در واقع تغییر علامت در ستون اول این آرایه متناظر با تعداد قطب‌های سمت راست خواهد بود.

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 8 \\ s^2 & 2 & 12 \\ s^1 & \frac{16-12}{2}=2 & \\ s^0 & 12 & \end{array}$$

۳ ـ گزینه «۴»

$$1+K(1+2s)(\frac{0/2}{T_1s-1})(\frac{2}{T_2s+1})=\frac{T_1T_2s^2+(T_1-T_2)s-1+0/4K+0/8ks}{(T_1s-1)(T_2s+1)}$$

$$1+G=0 \Rightarrow T_1T_2s^2+(T_1-T_2+0/8k)s+0/4k-1=0$$

$$\begin{array}{lll} s^2 & T_1T_2 & 0/4k-1 \\ s & T_1-T_2+0/8k & \\ s^0 & 0/4k-1 & \end{array}$$

$$(1)\ \ T_1T_2>0$$

$$T_1-T_2+0/8k>0 \Rightarrow T_1-T_2>-0/8k \Rightarrow (3)\ \ -2<T_1-T_2<0$$

$$0/4k-1>0 \Rightarrow k>\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=2/5 \Rightarrow (2)\ \ k>2/5$$

۴ ـ گزینه «۳»

$$1+G=1+k(2+\frac{5}{s})(\frac{1}{(s-2)(s+2)(s+4)})=1+\frac{k(2s+5)}{s(s-2)(s+2)(s+4)}=0$$

$$\Delta(s)=s\overbrace{(s-2)(s+2)}^{s^2-4}(s+4)+2ks+5k=0$$

$$\Delta(s)=(s^3-4s)(s+4)+2ks+5k=s^4+4s^3-4s^2-16s+2ks+5k=0$$

$$\Delta(s)=s^4+4s^3-4s^2+(2k-16)s+5k=0$$

s^4	1	-4	$5k$
s^3	4	$2k-16$	0
s^2	$\frac{-16-2k+16}{4}$	$5k$	
s^1	A	0	
s^0	$5k$		

$$A=\frac{(-0/5k)(2k-16)-20k}{-0/5k}$$

$$A=\frac{-k^2+8k-20k}{-0/5k}=\frac{-k^2-12k}{-0/5k}=2k+24$$

$$-0/5k>0 \Rightarrow 0/5k<0 \Rightarrow k<0 \qquad (1)$$

$$2k+24>0 \Rightarrow k>-12 \qquad (3)$$

$$5k>0 \quad k>0 \qquad (2)$$

۵ ـ گزینه «۳»

ابتدا: $C[1+\frac{1}{s}\frac{k}{s^2+2s+1}-\frac{k}{s^2+2s+1}]=R[\frac{1}{s}\frac{k}{s^2+2s+1}-\frac{k}{s^2+2s+1}] \Rightarrow \frac{C}{R}=\dfrac{\frac{K-KS}{s(s+1)^2}}{\frac{s(s+1)^2+K-KS}{s(s+1)^2}}$

$$=\frac{k(1-s)}{s^3+2s^2+(1-k)s+k}$$

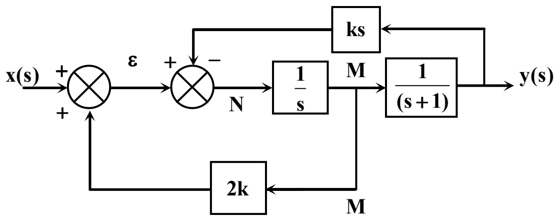
تشکیل آرایه Routh $1+G=s(s^2+2s+1)+k-ks=s^3+2s^2+(1-k)s+k=0$

s^3	1	$1-k$
s^2	2	k
s^1	$\frac{2-3k}{2}$	0
s^0	k	

برای پایداری $\begin{cases} k>0 \\ \frac{2-3k}{2}>0 \Rightarrow 3k<2 \Rightarrow k<\frac{2}{3} \Rightarrow 0<k<\frac{2}{3} \end{cases}$

* داوطلب باید نحوه ساده کردن دیاگرام بلوکی را به خوبی بداند و همچنین بتواند جهت قضاوت در پایداری سیستم از آرایه Routh استفاده کند.

۶ ـ گزینه «۳»



$$\begin{cases} \varepsilon = x + ۲MK \quad (۱) \\ N = \varepsilon - KSY \quad (۲) \\ M = N\dfrac{۱}{s} \qquad (۳) \end{cases}$$

$$(۱,۳) \to \varepsilon = x + z\frac{N}{S}k \quad (۴)$$

$$(۴,۲) \to N = (x + ۲\frac{Nk}{s} - KSY)$$

$$N(۱ - \frac{۲}{s}k) = X - KSY \Rightarrow N = \frac{X - KSY}{۱ - \frac{۲}{s}k} \quad (۵)$$

$$y = M\frac{۱}{s+۱} \Rightarrow y = \frac{x - ksy}{۱ - \frac{۲}{s}k}\frac{۱}{s}\frac{۱}{s+۱} = \frac{X - KSy}{s(\frac{s-۲k}{s})(s+۱)}$$

$$y = \frac{x - ksy}{(s-۲k)(s+۱)} \Rightarrow y = \frac{x - ksy}{s^۲ + (۱-۲k)s - ۲k} \Rightarrow s^۲y + (۱-۲k)sy - ۲ky = x - ksy$$

$$= (s^۲ + s - ks - ۲k)y = x \Rightarrow y = \frac{x}{s^۲ + (۱-k)s - ۲k}$$

$$\lim_{s\to ۰} s\frac{۱}{s}[۱ - \frac{۱}{s^۲ + (۱-k)s - ۲k}] = ۰ \Rightarrow ۱ - \frac{۱}{-۲k} = ۰ \Rightarrow ۱ = -\frac{۱}{۲k} \Rightarrow ۲k = -۱ \Rightarrow k = -\frac{۱}{۲}$$

۷ ـ گزینه «۴»

$$\frac{y(s)}{D(s)} = \frac{\overline{\dfrac{۱}{۲s^۲ + ۳s + ۱}}}{۱ + (۱ + \dfrac{۰/۲}{۳s})(\dfrac{۱}{۲s^۲ + ۳s + ۱})} = \frac{\overline{\dfrac{۱}{۲s^۲ + ۳s + ۱}}}{۱ + \dfrac{۳s + ۰/۲}{۳s(۲s^۲ + ۳s + ۱)}} = \frac{\overline{\dfrac{۱}{۲s^۲ + ۳s + ۱}}}{\dfrac{۳s(۲s^۲ + ۳s + ۱) + ۳s + ۰/۲}{۳s(۲s^۲ + ۳s + ۱)}} = \frac{۳s}{۶s^۳ + ۹s^۲ + ۶s + ۰/۲}$$

$$D = \frac{۱}{s}, e_\infty = ۰ - \lim_{s\to ۰} sy(s) \Rightarrow -\lim_{s\to ۰} s\frac{۱}{s}\frac{۳s}{۶s^۳ + ۹s^۲ + ۶s + ۰/۲} = ۰$$

از آنجایی که کنترل کننده انتگرالی است در صورت پایداری حلقه بسته اثر اغتشاش خارجی پله واحد در حالت ماندگار صفر خواهد شد.

بررسی پایداری سیستم: $\Delta(s) = ۶s^۳ + ۹s^۲ + ۶s + ۰/۲$

$s^۳$	۶	۶
$s^۲$	۹	۰/۲
$s^۱$	$\frac{۵۴ - ۱/۲}{۹}$	۰
$s^۰$	۰/۲	

⇐ سیستم پایدار است.

۸ ـ گزینه «۱»

پاسخ پله‌ای سیستم‌های سطح مایع تداخلی منحنی S شکل دارند.

۹ ـ گزینه «۳»

$$\begin{array}{c|ccc} & & & \\ \hline s^4 & 1 & -1 & 1 \\ s^3 & 2 & 3 & \\ s^2 & -\frac{5}{2} & 1 & \\ s^1 & \frac{19}{2} & & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

$$1+GH=s^4+2s^3-s^2+3s+1=0$$

در ستون اول دو بار تغییر علامت داریم که نشان دهنده دو ریشه ناپایدار کننده می‌باشد.

۱۰ ـ گزینه «۴»

$$R(t)=t^2 \Rightarrow R(s)=\frac{2}{s^3} \Rightarrow C=\frac{2}{s^3}\times\frac{-2}{s^3+3s^2-2}$$

$$C=\frac{-4}{s^3(s^3+3s^2-2)}$$

$$e_\infty=R_\infty-C_\infty=\lim_{s\to 0}[sR-sC]=\lim_{s\to 0}[\frac{2}{s^2}-\frac{-4}{s^2(s^3+3s^2-2)}]$$

$$e_\infty=\lim_{s\to 0}[\frac{2(s^3+3s^2-2)+4}{s^2(s^3+3s^2-2)}]$$

$$e_\infty=\lim_{s\to 0}\frac{2s^3+6s^2-4+4}{s^2(s^3+3s^2-2)}=\lim_{s\to 0}\frac{2s^3+6s^2}{s^2(s^3+3s^2-2)}=\lim_{s\to 0}\frac{s^2(2s+6)}{s^2(s^3+3s^2-2)}$$

$$e_\infty=\lim_{s\to 0}\frac{2s+6}{s^3+3s^2-2}=\frac{6}{-2}=-3$$

۱۱ ـ گزینه «۱»

$$\frac{N}{D} = L = \frac{۲k}{(s-۲a)(s+۷)}$$

نقطه شکست: $\frac{dL(s)}{ds} = ۰ \Rightarrow \frac{-[(s+۷)+(s-۲a)](۲k)}{[(s-۲a)(s+۷)]^۲} = ۰ \Rightarrow (۲s+۷-۲a)(۲k) = ۰$

$$k > ۰ \Rightarrow k \neq ۰ \Rightarrow ۲s+۷ = ۲a \Rightarrow a = \frac{۲s+۷}{۲}$$

۱۲ ـ گزینه «۱»

برای حالتی که کنترل کننده تناسبی ـ انتگرالی در سیستم داریم، تابع تبدیل حلقه باز به صورت زیر است:

$$G = \frac{k_c(۱+\frac{۱}{\tau_I s})}{(۱+\tau_۱ s)(۱+\tau_۲ s)} = \frac{k_c(\tau_I s+۱)}{\tau_I(۱+\tau_۱ s)(۱+\tau_۲ s)} \Rightarrow T = \frac{G}{G+۱} = \frac{k_c(\tau_I s+۱)}{\tau_I\tau_۱\tau_۲ s^۳ + \tau_I(\tau_۱+\tau_۲)s^۲ + (\tau_I + k_c\tau_I)s + k_c}$$

$$۱+G = ۱+k_c\frac{\frac{۲}{۳}(s+۱)}{s(s+۲)(s+\frac{۱}{۳})} \Rightarrow \begin{cases} P_۱ = ۰ \ , \ P_۲ = -۲ \ , \ P_۳ = -\frac{۱}{۳} \ , \ z = -۱ \\ r = ۳-۱ = ۲ \end{cases}$$

محل تقاطع مجانب $\gamma = \frac{(-۲-\frac{۱}{۳})+۱}{۲} = -۰/۶۶$

$$۱+G = s^۳ + ۲/۳۳s^۲ + (۰/۶۷+۰/۶۷k_c)s + ۰/۶۷k_c$$

$$k_c = \frac{s^۳+۲/۳s^۲+۰/۶۷s}{۰/۶۷s-۰/۶۷} \Rightarrow \frac{dk_c}{d_s} = ۰ \Rightarrow s = -۰/۱۸۷$$

در نقطه $s = -۰/۱۸۷$ نمودار مکان هندسی محور حقیقی را ترک می‌کند.

۱۳ـ گزینه «۳»

زاویه مجانب‌های مکان هندسی توسط رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\theta = \frac{(۲k'+۱)\pi}{r}\ ,\ r = n - m, k'$$

$$\left.\begin{array}{l} P_۱ = ۰\ ,\ P_۲ = -۳\ ,\ P_۳ = -۴ \Rightarrow \pi = -۳ \\ Z_۱ = -۱ \Rightarrow m = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{(۲k'+۱)\pi}{۲} \qquad k' = ۰,۱$$

$$r = n - m = ۳ - ۱ = ۲$$

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{۲}\ ;\ k' = ۰ \\ \frac{۳\pi}{۲}\ ;\ k' = ۱ \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{r} = \frac{(۰-۳-۴)(-۱)}{۲} = \frac{-۶}{۲} = -۳$$

۱۴ ـ گزینه «۱»

$$P_۱ = -۱, P_۲ = -۲$$

$$۱ + GH(s) = (s+۱)(s+۲) + \sqrt{۲}k_c = ۰ \Rightarrow s^۲ + ۳s + ۲ + \sqrt{۲}k_c = ۰$$

$$\text{به فرم استاندارد} \Rightarrow \frac{۱}{۲+\sqrt{۲}k_c}S^۲ + \frac{۳}{۲+\sqrt{۲}k_c}s + ۱ = ۰$$

$$\tau^۲ = \frac{۱}{۲+\sqrt{۲}k_c} \Rightarrow \tau = \frac{۱}{\sqrt{۲+\sqrt{۲}k_c}}\ ,\ ۲\tau\xi = \frac{۱}{(\frac{۳}{۲+\sqrt{۲}k_c})}$$

$$\xi = \frac{۲+\sqrt{۲}k_c}{۶\tau} = \frac{۲+\sqrt{۲}k_c}{\frac{۶}{\sqrt{۲+\sqrt{۲}k_c}}} = \frac{(۲+\sqrt{۲}k_c)\sqrt{۲+\sqrt{۲}k_c}}{۶}$$

$$\xi = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\frac{(۲+\sqrt{۲}k_c)^۳}{۳۶} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow (۲+\sqrt{۲}k_c)^۳ = ۱۸$$

$$۲+\sqrt{۲}k_c = ۲/۵ \Rightarrow \sqrt{۲}k_c = ۰/۵ \Rightarrow k_c = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۱۵ ـ گزینه «۴»

$s=-۲$ صفرهای حلقه باز و $s_{۱,۲}=۱\pm j$ قطب‌های حلقه باز

حال مکان هندسی ریشه‌ها برای تعیین سیستم با تابع تبدیل حلقه باز داده شده $(G(s))$ را به صورت زیر رسم می‌کنیم:

سیستم به ازای $۰<K<K_۱$ دارای ۲ ریشهٔ (۲ قطب) مختلط بوده که هر دو ریشه دارای بخش حقیقی مثبت بوده در نتیجه به ازای این مقـادیر از K سیستم نوسانی و ناپایدار خواهد بود، همچنین سیستم به ازای $k_۱<k<k_۲$ دارای ۲ ریشه مختلط با قسمت‌های حقیقـی منفـی بـوده و در نتیجه سیستم به ازای این مقادیر از k نوسانی و میرا خواهد بود. سیستم به ازای $k_۲<k<\infty$ دارای ۲ ریشه حقیقی منفـی بـوده و سیــستم بـه ازای این مقادیر از k غیرنوسانی و میرا خواهد بود، بنابراین سیستم در بهره‌های پایین $۰<k<k_۲$ نوسانی و در بهره‌های بالا $k>k_۲$ غیرنوسانی می‌باشد.